

# Soul Math

Jurnal Ilmiah Edukasi Matematika FKIP Universitas Dr. Soetomo

Miftahul Ulum ( SMA Negeri 1 Pasir Belengkong Kalimantan Timur)  
Pengembangan Perangkat Pembelajaran Matematika Model Learning Cycle 5E  
Pada Materi Integral Di Kelas XII IPA  
(hal. 217-231)

Viktor Sagala (FKIP, Universitas Dr. Soetomo Surabaya)  
Profil Lapisan Pemahaman Konsep Turunan Fungsi dan Folding Back  
Mahasiswa Calon Guru Matematika Berdasarkan Gender  
(hal. 234-243)

Rahmawati Erma Standsyah (FKIP, Universitas Dr. Soetomo Surabaya)  
Dimensi Metrik Graf  $P_n \circ C_m$  dan  $C_m \circ P_n$   
(hal. 244-250)

Lusiana Prastiwi, Kristina Yuventa (FKIP, Universitas Dr. Soetomo Surabaya)  
Penerapan Metode Jalur Kritis Atau Critical Path Method (CPM) Penentuan Waktu  
Optimal Dalam Proses Pembuatan Kerajinan Tenun Ikat Tradisional Kupang NTT  
(hal 251-256)

Yuni Listiana (FKIP, Universitas Dr. Soetomo Surabaya)  
Dimensi Matrik dan Dimensi Partisi pada Graf Hasil Operasi Korona  $K_n \circ K_{(n-1), n \geq 3}$   
(hal. 257-263)



ISSN 2334-9421

**JURNAL ILMIAH**  
**“SOULMATH”**  
*(Jurnal Edukasi Matematika)*

Terbit dua kali setahun pada bulan Januari dan Agustus. Berisi tulisan yang berasal dari hasil penelitian, kajian, atau karya ilmiah di bidang Pendidikan Matematika

**Pelindung**

Dekan Fakultas Keguruan & Ilmu Pendidikan  
Universitas Dr. Soetomo Surabaya

**Peninjau**

Dr. Sukesi, MM

**Ketua Penyunting**

Ahmad Hatip

**Penyunting Pelaksana**

Haerussaleh  
Sumartono  
Nuril Huda  
Ninik Mardiana

**Staf Pelaksana**

Lilik Rusdiana, Warsono, Taufiq

**Penerbit**

Fakultas Keguruan & Ilmu Pendidikan  
Universitas Dr. Soetomo Surabaya

**Alamat Penerbit:**

Gedung C. 102 Universitas Dr. Soetomo Surabaya  
Jalan Semolowaru 84 Surabaya 60118  
Telp (031) 5944748

ISSN 2334-9421

**JURNAL ILMIAH**  
**“SOULMATH”**  
(Jurnal Edukasi Matematika)

Volume 4 Nomor 5, Januari 2016  
Halaman 217-263

**Miftahul Ulum (SMA Negeri 1 Pasir Belengkong Kalimantan Timur)**  
Pengembangan Perangkat Pembelajaran Matematika Model *Learning Cycle* 5E Pada Materi Integral Di Kelas XII IPA  
(hal. 217-231)

**Viktor Sagala (FKIP, Universitas Dr. Soetomo Surabaya)**  
Profil Lapisan Pemahaman Konsep Turunan Fungsi dan *Folding Back* Mahasiswa Calon Guru Matematika Berdasarkan Gender  
(hal. 234-243)

**Rahmawati Erma Standsyah (FKIP, Universitas Dr. Soetomo Surabaya)**  
Dimensi metrik graf  $P_n \odot C_m$  dan  $C_m \odot P_n$   
(hal. 244-250)

**Lusiana Prastiwi, Kristina Yuventa (FKIP, Universitas Dr. Soetomo Surabaya)**  
Penerapan Metode Jalur Kritis Atau *Critical Path Method* (CPM) Penentuan Waktu Optimal Dalam Proses Pembuatan Kerajinan Tenun Ikat Tradisional Kupang NTT  
(hal 251-256)

**Yuni Listiana (FKIP, Universitas Dr. Soetomo Surabaya)**  
Dimensi Matrik dan Dimensi Partisi pada Graf Hasil Operasi Korona  $K_n \odot K_{n-1}, n \geq 3$   
(hal. 257-263)

## DIMENSI METRIK GRAF $P_n \odot C_m$ DAN $C_m \odot P_n$

Rahmawati Erma Standsyah

FKIP, Universitas Dr. Soetomo

**Abstract:** The concept of minimum resolving set has proved to be useful and or related to a variety of fields such as Chemistry, Robotic Navigation, and Combinatorial Search and Optimization. Two graph are path graph ( $P_n$ ) and circle graph ( $C_m$ ). The corona product  $P_n \odot C_m$  is defined as the graph obtained from  $P_n$  and  $C_m$  by taking one copy of  $P_n$  and  $m$  copies of  $C_m$  and joining by an edge each vertex from the  $n^{\text{th}}$  copy of  $P_n$  with the  $m^{\text{th}}$  vertex of  $C_m$ .  $P_n \odot C_m$  and  $C_m \odot P_n$  not commute to  $n \neq m$ , it is showed that order of graph  $P_n \odot C_m$  different with graph  $C_m \odot P_n$ . Based on research obtained  $\dim(P_n \odot C_m) = n \cdot \dim(W_{1,m})$  dan  $\dim(C_m \odot P_n) = m \cdot \dim(K_1 + P_n)$

**Keyword :** Resolving Sets, Metric Dimension, Path Graph, Circle Graph, Corona Graph

### Pendahuluan

Dimensi Metrik menjadi menarik untuk dibahas karena konsep himpunan pemisah yang mempunyai kardinalitas minimum telah terbukti sangat berguna untuk pembahasan pada bidang lain seperti Kimia (Chartrand, dkk, Boundary vertices in Graph and Poisson and Zhang, The Metric Dimension of unicyclic graphs), Navigasi Robot dan Pencarian (Khuller, Raghavachari, and Rosenfeld, Landmarks in graphs) dan Optimasi Kombinasi (Sebo and Tannier, On Metric generator of graphs)(Hernando, dkk, 1).

Dimensi Metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pemisah (resolving set) pada graf  $G$ . Misalkan  $u$  dan  $v$  adalah vertex-vertex dalam graf terhubung  $G$ , maka jarak  $d(u, v)$  adalah panjang lintasan terpendek antara  $u$  dan  $v$  pada  $G$ .

Untuk himpunan terurut  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  dari vertex-vertex dalam graf terhubung  $G$  dan vertex  $v \in V(G)$ , representasi  $v$  terhadap  $W$  adalah  $k$ -vektor  $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$ . Jika  $r(v|W)$  untuk setiap vertex  $v \in V(G)$  berbeda, maka  $W$  disebut himpunan pemisah dari  $V(G)$ . Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pemisah minimum (basis metrik), dan kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dimensi metrik dari  $G$  dinotasikan  $\dim(G)$  [1].

Kajian tentang dimensi metrik pada graf ini merupakan kajian yang sedang banyak dibicarakan. Terbukti dengan adanya banyak jurnal dan penelitian-penelitian yang membahas tentang kajian ini [1-6], misalnya Dimensi Metrik Graf Kincir dengan  $P_n \odot K_1 + mK_3$  [1], Resolvability in graph and t

metric dimation of a graph [2], On the Metric Dimension of Corona Product Graph [3], On the Metric Dimension of Some Families of Graphs [4], On the metric dimension of circulant graphs [5], On the metric dimension of line graphs [6] dan lain sebagainya. Semuanya membahas tentang dimensi metrik pada graf. Oleh karena itu pada tulisan dihitung dimensi metrik dengan mengembangkan graf-graf yang telah dikerjakan sebelumnya.

Diberikan dua graf yaitu graf path yang disimbolkan dengan  $P_n$  dan graf circle yang disimbolkan dengan  $C_m$ . Operasi corona  $P_n \odot C_m$  adalah graf yang diperoleh dari  $P_n$  dan  $C_m$  dengan mengambil 1 graf  $P_n$  yang masing-masing simpul graf  $P_n$  dihubungkan pada setiap simpul graf.  $P_n \odot C_m$  dan  $P_n \odot C_m$  tidak bersifat komutatif untuk  $n \neq m$ . Hal ini ditunjukkan bahwa order graf  $P_n \odot C_m$  dengan graf  $C_m \odot P_n$  tidak sama. Sehingga pada tulisan ini dihitung besar nilai dimensi metrik dari graf  $P_n \odot C_m$  dan graf  $C_m \odot P_n$ .

**Dimensi Metrik Graf  $P_n \odot C_m$**

Graf  $P_n \odot C_m$  graf yang diperoleh dari  $P_n$  dan  $C_m$  dengan mengambil 1 graf  $P_n$  yang masing-masing simpul graf  $P_n$  dihubungkan pada setiap simpul graf  $C_m$  sehingga graf  $H$  yaitu  $H = P_n \odot C_m$  memiliki jumlah simpul sebanyak  $n + mn$ . Simpul-simpul yang ada pada graf  $P_n$  misalkan diberi label  $V(P_n) =$

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  dan simpul pada graf  $C_m$  diberi label  $V(C_m) = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  dengan jumlah  $V(C_m)$  sebanyak  $nm$  buah. Dimisalkan simpul graf  $C_m$  yang dikoronakan dengan simpul  $P_n$  yang pertama dilabelkan  $b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{1,m}$  sehingga simpul graf  $C_m$  yang dikoronakan dengan simpul  $P_n$  yang ke- $n$  memiliki label  $b_{n,1}, b_{n,2}, \dots, b_{n,m}$ . Berdasarkan pemisalan-pemisalan tersebut maka graf  $H$  memiliki  $n + mn$  simpul yaitu  $V(H) = \{\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \{b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{1,m}\}, \{b_{2,1}, b_{2,2}, \dots, b_{2,m}\}, \dots, \{b_{n,1}, b_{n,2}, \dots, b_{n,m}\}\}$

Graf  $P_1 \odot C_m$  bentuknya sama dengan graf *Wheel*  $W_{1,m}$ . Graf *Wheel* ini memiliki dimensi metrik sebanyak [3]:

$$\dim(W_{1,m}) = \begin{cases} 2 & \text{untuk } m = 3,4 \\ 3 & \text{untuk } m = 5,6 \\ \left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor & \text{untuk } m \geq 7 \end{cases}$$

Sedangkan graf  $H$  bentuknya sama dengan graf  $W_{1,m}$  sebanyak  $n$  buah dengan masing-masing pusatnya terhubung.

Untuk menentukan dimensi metrik graf  $H$  dilakukan pencarian batas bawah dan batas atas. Dengan bentuk graf  $P_1 \odot C_m$  memenuhi persamaan (1) diperoleh paling sedikitnya memenuhi aturan anggota himpunan pembeda pada graf *wheel*. Oleh karena graf  $H$  teratur memiliki  $n$  buah graf *wheel* yang pusatnya saling terhubung maka jelas bahwa batas bawah  $\dim(H) = \dim(P_n \odot C_m) = n \cdot \dim(W_{1,m})$ . Untuk menentukan batas atas dimensi metrik graf  $H$  dilakukan konstruksi.

**Kasus 1  $m = 3$**

Misalkan diambil himpunan pembeda

$$W = \{b_{1,1}, b_{1,2}, b_{2,1}, b_{2,2}, \dots, b_n, 1, b_n, 2\}$$

maka diperoleh representasi terhadap  $W$ :

$$r(b_{1,3}|W) = (2, 1, 3, 3, 4, 4, \dots, n + 1, +1),$$

$$r(b_{2,3}|W) = (3, 3, 2, 1, 3, 3, 4, 4, \dots, n, n),$$

⋮

$$r(b_{n,3}|W) = (n + 1, n + 1, \dots, 4, 4, 3, 3, 2, 1),$$

$$r(a_1|W) = (1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n),$$

$$r(a_2|W) = (2, 2, 1, 1, 2, 2, \dots, n - 1, n - 1),$$

⋮

$$r(a_n|W) = (n, n, \dots, 2, 2, 1, 1)$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki representasi yang berbeda-beda terhadap  $W$ , dengan demikian  $\dim(H) = n.2$  untuk  $m = 3$

**Kasus 2  $m = 4$**

Misalkan diambil himpunan pembeda

$$W = \{b_{1,1}, b_{1,2}, b_{2,1}, b_{2,2}, \dots, b_n, 1, b_n, 2\}$$

maka diperoleh representasi terhadap  $W$ :

$$r(b_{1,3}|W) = (2, 1, 3, 3, 4, 4, \dots, n + 1, n + 1),$$

$$r(b_{1,4}|W) = (1, 2, 3, 3, 4, 4, \dots, n + 1, n + 1),$$

$$r(b_{2,3}|W) = (3, 3, 2, 1, 3, 3, 4, 4, \dots, n, n),$$

$$r(b_{2,4}|W) = (3, 3, 1, 2, 3, 3, 4, 4, \dots, n, n),$$

⋮

$$r(b_{n,3}|W) = (n + 1, n + 1, \dots, 4, 4, 3, 3, 2, 1),$$

$$r(b_{n,4}|W) = (n + 1, n + 1, \dots, 4, 4, 3, 3, 1, 2),$$

$$r(a_1|W) = (1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n),$$

$$r(a_2|W) = (2, 2, 1, 1, 2, 2, \dots, n - 1, n - 1),$$

⋮

$$r(a_n|W) = (n, n, \dots, 2, 2, 1, 1)$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki representasi yang berbeda-beda terhadap  $W$ , dengan demikian  $\dim(H) = n.2$  untuk  $m = 4$

**Kasus 3  $m = 5$**

Misalkan diambil himpunan pembeda

$$W = \{b_{1,1}, b_{1,3}, b_{1,5}, b_{2,1}, b_{2,3}, b_{2,5} \dots, b_n, 1, b_n, 3, b_n, 5\}$$

maka diperoleh representasi terhadap  $W$ :

$$r(b_{1,2}|W) = (1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots, n + 1, n + 1, n + 1)$$

$$r(b_{1,4}|W) = (2, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots, n + 1, n + 1, n + 1)$$

$$r(b_{2,2}|W) = (3, 3, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 3, \dots, n, n, n)$$

$$r(b_{2,4}|W) = (3, 3, 3, 2, 1, 1, 3, 3, 3, \dots, n, n, n)$$

⋮

$$r(b_{n,2}|W) = (n + 1, n + 1, +1, n, n, n, \dots, 3, 3, 3, 2, 1, 1)$$

$$r(b_{n,4}|W) = (n + 1, n + 1, n + 1, n, n, n, \dots, 3, 3, 3, 2, 1, 1)$$

$$r(a_1|W) = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, n, n, n),$$

$$r(a_2|W) = (2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, n - 1, n - 1, n - 1),$$

⋮

$$r(a_n|W) = (n, n, n, \dots, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki representasi yang berbeda-beda terhadap  $W$ , dengan demikian  $\dim(H) = n.3$  untuk  $m = 5$

**Kasus 4  $m = 6$**

Misalkan diambil himpunan pembeda

$$W = \{b_{1,1}, b_{1,3}, b_{1,5}, b_{2,1}, b_{2,3}, b_{2,5} \dots$$

$bn, 1, bn, 3, bn, 5 \}$  maka diperoleh representasi terhadap  $W$ :

$$\begin{aligned}
 r(b_{1,2}|W) &= (1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots, n + 1, n + 1, n + 1) \\
 r(b_{1,4}|W) &= (2, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots, n + 1, n + 1, n + 1) \\
 r(b_{1,6}|W) &= (2, 2, 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots, n + 1, n + 1, n + 1) \\
 r(b_{2,2}|W) &= (3, 3, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 3, \dots, n, n, n) \\
 r(b_{2,4}|W) &= (3, 3, 3, 2, 1, 1, 3, 3, 3, \dots, n, n, n) \\
 r(b_{2,6}|W) &= (3, 3, 3, 2, 2, 1, 3, 3, 3, \dots, n, n, n) \\
 &\vdots \\
 r(b_{n,2}|W) &= (n + 1, n + 1, \dots, 3, 3, 3, 1, 1, 2) \\
 r(b_{n,4}|W) &= (n + 1, n + 1, \dots, 3, 3, 3, 2, 1, 1) \\
 r(b_{n,6}|W) &= (n + 1, n + 1, \dots, 3, 3, 3, 2, 2, 1) \\
 r(a_1|W) &= (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, n, n, n), \\
 r(a_2|W) &= (2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, n - 1, n - 1, n - 1), \\
 &\vdots \\
 r(a_n|W) &= (n, n, n, \dots, 2, 2, 2, 1, 1, 1)
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki representasi yang berbeda-beda terhadap  $W$ , dengan demikian  $dim(H) = n \cdot 3$  untuk  $m = 6$

**Kasus 5**  $m \geq 7$

Misalkan  $x = \lfloor \frac{2m+2}{5} \rfloor$  dan diambil himpunan pembeda

$$W = \{b_{1,1}, b_{1,3}, \dots, b_{1,x}, b_{2,1}, b_{2,3}, \dots, b_{2,x}, \dots, b_{n,1}, b_{n,3}, \dots, b_{n,x}\}$$

maka diperoleh representasi terhadap  $W$ :

$$r(b_{1,x+1}|W) = (1, 1, 2, \dots, 3, 3, 3, \dots, n + 1, n + 1, \dots)$$

$$\begin{aligned}
 r(b_{1,x+3}|W) &= (2, 1, 1, 2, \dots, 3, 3, \dots, n + 1, n + 1, \dots) \\
 &\vdots \\
 r(b_{1,m}|W) &= (2, 2, 2, \dots, 3, 3, \dots, n + 1, n + 1, \dots) \\
 &\vdots \\
 r(b_{n,x+1}|W) &= (n + 1, n + 1, \dots, 3, 3, \dots, 1, 1, 2, \dots) \\
 r(b_{n,x+3}|W) &= (n + 1, n + 1, \dots, 3, 3, \dots, 2, 1, 1, \dots) \\
 &\vdots \\
 r(b_{n,m}|W) &= (n + 1, n + 1, \dots, 3, 3, \dots, 2, 2, 2, \dots) \\
 r(a_1|W) &= (1, 1, \dots, 2, 2, \dots, 3, 3, \dots, n, n, \dots), \\
 r(a_2|W) &= (2, 2, \dots, 1, 1, \dots, 2, 2, \dots, n - 1, n - 1, \dots), \\
 r(a_n|W) &= (n, n, \dots, 2, 2, \dots, 1, 1, \dots)
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki representasi yang berbeda-beda terhadap  $W$ , dengan demikian  $dim(H) = n \cdot \lfloor \frac{2m+2}{5} \rfloor$  untuk  $m \geq 7$

Berdasarkan konstruksi dari 5 kasus diatas dapat dinyatakan bahwa batas atas untuk dimensi metrik  $P_n \odot C_m$  adalah  $n \cdot dim(W_{1,m})$ . Oleh karena batas atas sama dengan batas bawah maka  $dim P_n \odot C_m = n \cdot dim(W_{1,m})$  untuk  $n \geq 1$  dan  $m > 1$ .

**Lemma:** Jika  $P_n \odot C_m$  dengan  $n \geq 1$  dan  $m > 1$  merupakan graf teratur maka  $dim(P_n \odot C_m) = n \cdot dim(W_{1,m})$ .

**Bukti:** Dengan bentuk graf  $P_n \odot C_m$  memenuhi persamaan (1) diperoleh paling sedikitnya memenuhi aturan anggota himpunan pembeda pada graf wheel. Oleh karena graf  $H$  teratur memiliki  $n$  buah graf wheel yang pusatnya saling terhubung maka

jelas bahwa batas bawah  $dim(H) = dim P_n \odot C_m = n \cdot (W_{1,m})$

Sedangkan pada konstruksi sebelumnya diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan simpul terhadap himpunan pembeda, dengan demikian batas atas  $dim(P_n \odot C_m) = n \cdot dim(W_{1,m})$ . Oleh karena batas atas sama dengan batas bawah, maka  $dim(P_n \odot C_m) = n \cdot dim(W_{1,m})$ .

### Dimensi Metrik Graf $C_m \odot P_n$

Graf  $C_m \odot P_n$  graf yang diperoleh dari  $C_m$  dan  $P_n$  dengan mengambil 1 graf  $C_m$  yang masing-masing simpul graf  $C_m$  dihubungkan pada setiap simpul graf  $P_n$  sehingga graf  $G$  yaitu  $G = C_m \odot P_n$  memiliki jumlah simpul sebanyak  $m+nm$ . Simpul-simpul yang ada pada graf  $C_m$  misalkan diberi label  $V(C_m) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  dan simpul pada graf  $P_n$  diberi label  $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dengan jumlah  $V(P_n)$  sebanyak  $mn$  buah. Dimisalkan simpul graf  $P_n$  yang dikoronakan dengan simpul  $C_m$  yang pertama dilabelkan  $\{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,n}\}$  sehingga simpul graf  $P_n$  yang dikoronakan dengan simpul  $C_m$  yang ke-

$m$  memiliki label  $\{v_{m,1}, v_{m,2}, \dots, v_{m,n}\}$ . Berdasarkan pemisalan-pemisalan tersebut maka graf  $G$  memiliki  $m+nm$  simpul yaitu

$$V(G) = \{\{u_1, u_2, \dots, u_m\}, \{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,n}\}, \{v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{2,n}\}, \dots, \{v_{m,1}, v_{m,2}, \dots, v_{m,n}\}\}$$

Graf  $C_1 \odot P_n$  sama dengan graf  $K_1 + P_n$ . Graf  $K_1 + P_n$  memiliki dimensi metrik sebanyak [4]:

$$\begin{aligned} & dim(K_1 + P_n) \\ &= \begin{cases} 2 & \text{untuk } m = 3,4 \\ 3 & \text{untuk } m = 5,6 \\ \lfloor \frac{2m+2}{5} \rfloor & \text{untuk } m \geq 7 \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

sedangkan graf  $G$  memiliki bentuk yang sama dengan graf  $K_1 + P_n$  sebanyak  $m$  buah yang mana simpul masing-masing simpul  $K_1$  dihubungkan secara melingkar. Untuk menentukan dimensi metrik graf  $G = C_m \odot P_n$

dilakukan pencarian batas bawah dan batas atas. Dengan bentuk graf  $C_1 \odot P_n$  memenuhi persamaan (2) diperoleh paling sedikitnya memenuhi aturan anggota himpunan pembeda pada graf  $K_1 + P_n$ . Oleh Karena graf  $G$  teratur memiliki  $m$  buah graf  $K_1 + P_n$  yang masing-masing simpul  $K_1$  dihubungkan secara melingkar maka jelas bahwa batas bawah  $dim(G) = dim(C_m \odot P_n) = m$ .

Untuk memenuhi batas atas  $dim(K_1 + P_n)$ . Untuk memenuhi batas atas dimensi metrik graf  $G$  dilakukan konstruksi.

#### Kasus 1 $n = 3$

Misalkan diambil himpunan pembeda  $W = \{v_{1,1}, v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,3}, \dots, v_{m,1}, v_{m,3}\}$  maka diperoleh representasi terhadap  $W$ :

$$\begin{aligned} r(v_{1,2}|W) &= (1, 1, 3, 3, \dots, 4, 4, 3, 3), \\ r(v_{2,2}|W) &= (3, 3, 1, 1, 3, 3, \dots, 4, 4), \\ &\vdots \\ r(v_{n,2}|W) &= (3, 3, 4, 4, \dots, 1, 1), \\ r(u_1|W) &= (1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, 2, 2), \\ r(u_2|W) &= (2, 2, 1, 1, 2, 2, \dots, 3, 3), \\ &\vdots \\ r(u_n|W) &= (2, 2, \dots, 2, 2, 1, 1) \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki representasi yang berbeda-beda terhadap  $W$ , dengan demikian  $dim(G) = m.2$  untuk  $n = 3$

**Kasus 2**  $n = 4$

Misalkan diambil himpunan pembeda  $W =$

$$\{v_{1,1}, v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,3}, \dots, v_{n,1}, v_{n,3}\}$$

maka diperoleh representasi terhadap  $W$ :

$$\begin{aligned} r(v_{1,2}|W) &= (1, 1, 3, 3, \dots, 4, 4, 3, 3), \\ r(v_{1,4}|W) &= (2, 1, 3, 3, \dots, 4, 4, 3, 3), \\ r(v_{2,2}|W) &= (3, 3, 1, 1, 3, 3, \dots, 4, 4), \\ r(v_{2,4}|W) &= (3, 3, 2, 1, 3, 3, \dots, 4, 4), \\ &\vdots \\ r(v_{n,2}|W) &= (3, 3, 4, 4, \dots, 1, 1), \\ r(v_{n,4}|W) &= (3, 3, 4, 4, \dots, 2, 1), \\ r(u_1|W) &= (1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, 2, 2), \\ r(u_2|W) &= (2, 2, 1, 1, 2, 2, \dots, 3, 3), \\ &\vdots \\ r(u_n|W) &= (2, 2, \dots, 2, 2, 1, 1) \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki representasi yang berbeda-beda terhadap  $W$ , dengan demikian  $dim(H) = m.2$  untuk  $n = 4$

**Kasus 3**  $n = 5$

Misalkan diambil himpunan pembeda  $W = \{v_{1,1}, v_{1,3}, v_{1,5}, v_{2,1}, v_{2,3}, v_{2,5}, \dots, v_{n,1}, v_{n,3}, v_{n,5}\}$  maka diperoleh representasi terhadap  $W$ :

$$\begin{aligned} r(v_{1,2}|W) &= (1, 1, 2, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4, 3, 3, 3) \\ r(v_{1,4}|W) &= (1, 1, 2, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4, 3, 3, 3) \\ r(v_{2,2}|W) &= (3, 3, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4) \\ r(v_{2,4}|W) &= (3, 3, 3, 2, 1, 1, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4) \\ &\vdots \\ r(v_{n,2}|W) &= (3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots, 1, 1, 2) \\ r(v_{n,4}|W) &= (3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots, 2, 1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(u_1|W) &= (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 2, 2, 2), \\ r(u_2|W) &= (2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, 3, 3, 3), \\ &\vdots \\ r(u_n|W) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 2, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki representasi yang berbeda-beda terhadap  $W$ , dengan demikian  $dim(H) = m.3$  untuk  $n = 5$

**Kasus 4**  $n = 6$

Misalkan diambil himpunan pembeda  $W = \{v_{1,1}, v_{1,3}, v_{1,5}, v_{2,1}, v_{2,3}, v_{2,5}, \dots, v_{n,1}, v_{n,3}, v_{n,5}\}$  maka diperoleh representasi terhadap  $W$ :

$$\begin{aligned} r(v_{1,2}|W) &= (1, 1, 2, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4, 3, 3, 3) \\ r(v_{1,4}|W) &= (2, 1, 1, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4, 3, 3, 3) \\ r(v_{1,6}|W) &= (2, 2, 1, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4, 3, 3, 3) \\ r(v_{2,2}|W) &= (3, 3, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4) \\ r(v_{2,4}|W) &= (3, 3, 3, 2, 1, 1, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4) \\ r(v_{2,6}|W) &= (3, 3, 3, 2, 2, 1, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4) \\ &\vdots \\ r(v_{n,2}|W) &= (3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots, 1, 1, 2) \\ r(v_{n,4}|W) &= (3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots, 2, 1, 1) \\ r(v_{n,6}|W) &= (3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots, 2, 2, 1) \\ r(u_1|W) &= (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 2, 2, 2), \\ r(u_2|W) &= (2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, 3, 3, 3) \end{aligned}$$

**Kasus 5**  $m \geq 7$

Misalkan  $x = \lfloor \frac{2m+2}{5} \rfloor$  dan diambil himpunan pembeda  $W = \{v_{1,1}, v_{1,3}, \dots, v_{1,x}, v_{2,1}, v_{2,3}, \dots, v_{2,x}, \dots, v_{n,1}, v_{n,3}, \dots, v_{n,x}\}$  maka diperoleh representasi terhadap  $W$ :

$$\begin{aligned} r(v_{1,2}|W) &= (1, 1, 2, \dots, 3, 3, 3, \dots, 3, 3, 3, \dots) \\ &= (2, 1, 1, 2, \dots, 3, 3, 3, \dots, 3, 3, 3, \dots) \\ &\vdots \\ r(v_{1,m}|W) &= (2, 2, 2, \dots, 3, 3, 3, \dots, 3, 3, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \vdots \\
 r(v_{n,2}|W) &= (3, 3, \dots, 4, 4, \dots, 1, 1, 2, \dots) \\
 r(v_{n,4}|W) &= (3, 3, \dots, 4, 4, \dots, 2, 1, 2, \dots) \\
 & \vdots \\
 r(v_{n,m}|W) &= (3, 3, \dots, 4, 4, \dots, 2, 2, 2, \dots) \\
 r(u_1|W) &= (1, 1, \dots, 2, 2, \dots, 3, 3, \dots, 2, 2, \dots), \\
 r(u_2|W) &= (2, 2, \dots, 1, 1, \dots, 2, 2, \dots, 3, 3, \dots), \\
 & \vdots \\
 r(u_n|W) &= (2, 2, \dots, 2, 2, \dots, 1, 1, \dots)
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki representasi yang berbeda-beda terhadap  $W$ , dengan demikian  $\dim(G) = m \cdot \left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor$  untuk  $n \geq 7$

Berdasarkan konstruksi dari 5 kasus diatas dapat dinyatakan bahwa batas atas untuk dimensi metrik  $C_m \odot P_n$  adalah  $m \cdot \dim(K_1 + P_n)$ . Oleh karena batas atas sama dengan batas bawah maka  $\dim(C_m \odot P_n) = m \cdot \dim(K_1 + P_n)$ . untuk  $m \geq 1$  dan  $n > 1$ .

**Lemma:** Jika  $C_m \odot P_n$  dengan  $m \geq 1$  dan  $n > 1$  merupakan graf teratur maka  $\dim(C_m \odot P_n) = m \cdot \dim(K_1 + P_n)$ .

**Bukti:** Dengan bentuk graf  $C_m \odot P_n$  memenuhi persamaan (2) diperoleh paling sedikitnya memenuhi aturan anggota himpunan pembeda pada graf  $K_1 + P_n$ . Oleh karena graf  $G$  teratur memiliki  $m$  buah graf  $K_1 + P_n$  yang simpul  $K_1$  saling terhubung secara melingkar maka jelas bahwa batas bawah  $\dim(G) = \dim(C_m \odot P_n) = m \cdot \dim(K_1 + P_n)$ .

Sedangkan pada konstruksi sebelumnya diperoleh representasi yang berbeda pada setiap

himpunan simpul terhadap himpunan pembeda, dengan demikian batas atas

$\dim(C_m \odot P_n) = m \cdot \dim(K_1 + P_n)$ . Oleh karena batas

atas sama dengan batas bawah, maka  $\dim(C_m \odot P_n) = m \cdot \dim(K_1 + P_n)$ .

### Simpulan

- $P_n \odot C_m$  dengan  $n \geq 1$  dan  $m > 1$  merupakan graf teratur maka  $\dim(P_n \odot C_m) = n \cdot \dim(W_{1,m})$ .
- $C_m \odot P_n$  dengan  $m > 1$  dan  $n > 1$  merupakan graf teratur maka  $\dim(C_m \odot P_n) = m \cdot \dim(K_1 + P_n)$ .

### Daftar Pustaka

- Wahyudi, Suhud dan Sumarno. 2010. *Dimensi Metrik pada Graf Kincir dengan Pola  $K_1 + mK_3$* . FMIPA ITS, 731-744.
- G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, O. R. Oeller-mann, *Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph*, Discrete Applied Mathematics 105 (2000) 99-113.
- Yero.L.G,Kuziak.D,Rodríguez-Velázquez.J.A, *On The Metric Dimension Of Corona Product Graphs, Computer and Mathematics with Applications*.61(2011) 2793-2798.
- Hernando, Carmen. dkk, *On The Metric Dimension of Some Families of Graphs*,Electronic Note in Discrete Mathematics 22 (2005) 129-133.
- Imrana.M,Baig.A Q, Ahtsham.Syed ,*Javaid.Imran , On the metric dimension of circulant graphs*,Applied Mathematics Letters 25 (2012) 320-325.
- Feng.Min ,Xu.Min ,Wang.Kaishun ,*On the metric dimension of line graphs*,Discrete Applied Mathematics 161 (2013) 802-805

**Fakultas Keguruan & Ilmu Pendidikan  
Universitas Dr. Soetomo Surabaya**

Gedung C. 102 Universitas Dr. Soetomo Surabaya  
Jalan Semolowaru 84 Surabaya 60118

Telp (031) 5944748  
<http://unitomo.ac.id>

